

Annexe -C-

Notion de la Géométrie Différentielle

Dans cette annexe, nous donnons des notions de la géométrie différentielle en vue de les utiliser dans la théorie de retour d'état linéarisant. Ces notions sont détaillées dans [19].

On considère le système :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{C. 1}$$

Avec :

$$\begin{aligned}f &= (f_1, f_2, \dots, f_n)^T \\ g &= (g_1, g_2, \dots, g_n)^T \\ x &= (x_1, x_2, \dots, x_n)^T\end{aligned}$$

C.1- DIFFEOMORPHISME

Une fonction ϕ :

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mapsto (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

définie dans une région Ω est un difféomorphisme local si :

1. $\phi(x)$ est un bijection
2. $\phi(x)$ et $\phi(x)^{-1}$ sont différentiables

Si ces conditions sont vérifiées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ ($\Omega \in \mathbb{R}^n$), le Difféomorphisme est dit globale.

C.2-CHAMP DE VECTEURS

Un champ de vecteur f est une application qui assigne a chaque point p dans une région $\Omega_p \in \mathfrak{R}^n$ une fonction f_p dans $\mathfrak{R}^n$:

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow \mathfrak{R}^n \\ p &\mapsto f_p \end{aligned}$$

C.3-GRADIENT

Etant donné une fonction scalaire $h(x)$ de l'état x . Le gradient de h est donné par :

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{C.2})$$

∇h représente un vecteur colonne d'éléments: $\nabla h_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$

C.4-JACOBIEN

Le jacobien d'un champ de vecteur $f(x)$ est donné par :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{C.3})$$

∇f représente une matrice d'éléments : $\nabla f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$

C.5-DERIVEE DE LIE

On considère une fonction scalaire $h: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ et deux champs de vecteurs : $f, g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$. La dérivée de Lie de h suivant le champ de vecteur f est une fonction scalaire définie par:

$$L_f h = \nabla h f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (\text{C. 4})$$

Les dérivée de Lie d'ordre supérieur sont donnée par :

$$\begin{aligned} L_f^0 h &= h \\ L_f^i h &= L_f (L_f^{i-1} h) = \nabla (L_f^{i-1} h) f \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{C. 5})$$

La dérivée de la fonction $L_f h$ suivant le champ de vecteur g est donnée par :

$$L_g L_f h = \nabla (L_f h) g = \sum \frac{\partial (L_f h(x))}{\partial x_i} g_i(x) \quad (\text{C. 6})$$

C.6-CROCHET DE LIE

Soit f et g deux champs de vecteurs dans $\mathfrak{R}^n$. Le crochet de Lie de f et g et un troisième champ de vecteur défini par :

$$ad_f g = [f, g] = \nabla g f - \nabla f g \quad (C. 7)$$

Le crochet de lie d'ordre supérieur est défini comme suit :

$$\begin{aligned} ad_f^0 g &= g \\ ad_f^i g &= [f, ad_f^{i-1} g] \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (C. 8)$$

Le crochet de Lie a les propriétés suivantes :

1. Bilinéarité

$$\begin{aligned} [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g] &= \alpha_1 [f_1, g] + \alpha_2 [f_2, g] \\ [f, \alpha_1 g + \alpha_2 g_2] &= \alpha_1 [f, g_1] + \alpha_2 [f, g_2] \end{aligned} \quad (C. 9)$$

Avec:

α_1, α_2 : Des constantes réelles

f_1, g_1 : Des champs de vecteurs ($i=1,2$).

2. Anti-commutativité

$$[f, g] = -[g, f] \quad (C. 10)$$

3. Identité de Jacob

$$L_{ad_f g} h = L_f L_g h - L_g L_f h \quad (C. 11)$$

C.7-DISTRIBUTION

Une distribution D est espace ou sous-espace vectorielle engendrée par une base formé par les champs de vecteurs $f_1, f_2, \dots, f_d$:

$$D = \text{span} \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$$

C.8-INVOLUTIVITE

La distribution D est dite involutive si est seulement si elle est stable par crochet de Lie :

$$\forall x, y \in D : [x, y] \in D.$$